


From Italian domination in lexicographic product graphs to w -domination in graphs*

Abel Cabrera Martínez , Alejandro Estrada-Moreno ,

Juan Alberto Rodríguez-Velázquez 

*Universitat Rovira i Virgili, Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques,
Av. Països Catalans 26, 43007 Tarragona, Spain*

Received 23 April 2020, accepted 9 May 2021, published online 18 February 2022

Abstract

In this paper, we show that the Italian domination number of every lexicographic product graph $G \circ H$ can be expressed in terms of five different domination parameters of G . These parameters can be defined under the following unified approach, which encompasses the definition of several well-known domination parameters and introduces new ones.

Let $N(v)$ denote the open neighbourhood of $v \in V(G)$, and let $w = (w_0, w_1, \dots, w_l)$ be a vector of nonnegative integers such that $w_0 \geq 1$. We say that a function $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, l\}$ is a w -dominating function if $f(N(v)) = \sum_{u \in N(v)} f(u) \geq w_i$ for every vertex v with $f(v) = i$. The weight of f is defined to be $\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. The w -domination number of G , denoted by $\gamma_w(G)$, is the minimum weight among all w -dominating functions on G .

Specifically, we show that $\gamma_I(G \circ H) = \gamma_w(G)$, where $w \in \{2\} \times \{0, 1, 2\}^l$ and $l \in \{2, 3\}$. The decision on whether the equality holds for specific values of w_0, \dots, w_l will depend on the value of the domination number of H . This paper also provides preliminary results on $\gamma_w(G)$ and raises the challenge of conducting a detailed study of the topic.

Keywords: Italian domination, w -domination, k -domination, k -tuple domination, lexicographic product graph.

Math. Subj. Class. (2020): 05C69, 05C76

*The authors would thank the anonymous reviewers for their generous time in providing detailed comments and suggestions that helped us to improve the paper.

E-mail addresses: abel.cabrera@urv.cat (Abel Cabrera Martínez), alejandra.estrada@urv.cat (Alejandro Estrada-Moreno), juanalberto.rodriguez@urv.cat (Juan Alberto Rodríguez-Velázquez)

Od italijanske dominacije v leksikografskem produktu grafov do w -dominacije v grafih*

Abel Cabrera Martínez , Alejandro Estrada-Moreno ,
Juan Alberto Rodríguez-Velázquez 

Universitat Rovira i Virgili, Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques,
Av. Països Catalans 26, 43007 Tarragona, Spain

Prejeto 23. aprila 2020, sprejeto 9. maja 2021, objavljeno na spletu 18. februarja 2022

Povzetek

V tem članku pokažemo, da je mogoče indeks italijanske dominacije vsakega leksikografskega produkta grafov $G \circ H$ izraziti s pomočjo petih različnih dominacijskih parametrov grafa G . Te parametre se da definirati z naslednjim poenotenim pristopom, ki zajema definicijo več dobro znanih dominacijskih parametrov, vpelje pa tudi nove.

Naj $N(v)$ označuje odprto okolico vozlišča $v \in V(G)$ in naj bo $w = (w_0, w_1, \dots, w_l)$ vektor nenegativnih celih števil, pri čemer je $w_0 \geq 1$. Pravimo, da je funkcija $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, l\}$ w -dominirajoča, če je $f(N(v)) = \sum_{u \in N(v)} f(u) \geq w_i$ za vsako vozlišče v , za katero je $f(v) = i$. Teža funkcije f je definirana kot $\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$, w -dominacijski indeks grafa G , označen z $\gamma_w(G)$, pa je minimalna teža vseh w -dominacijskih funkcij na grafu G .

Pokažemo, da je $\gamma_I(G \circ H) = \gamma_w(G)$, kjer je $w \in \{2\} \times \{0, 1, 2\}^l$ in $l \in \{2, 3\}$. Če takšna enakost velja za specifične vrednosti w_0, \dots, w_l , je odvisno od vrednosti dominacijskega indeksa grafa H . Ta članek prinaša preliminarne rezultate v zvezi z $\gamma_w(G)$ in zastavlja izziv za podroben študij te teme.

Ključne besede: Italijanska dominacija, w -dominacija, k -dominacija, k -kratna dominacija, leksikografski produkt grafov.

Math. Subj. Class. (2020): 05C69, 05C76

*Avtorji bi se radi zahvalili neznanim recenzentom za ves njihov čas, ki so ga posvetili podrobnim komentarjem in predlogom, ki so pomagali izboljšati članek.

E-poštni naslovi: abel.cabrera@urv.cat (Abel Cabrera Martínez), alejandro.estrada@urv.cat (Alejandro Estrada-Moreno), juanalberto.rodriguez@urv.cat (Juan Alberto Rodríguez-Velázquez)