


Relative Heffter arrays and biembeddings

Simone Costa, Anita Pasotti *

*DICATAM – Sez. Matematica, Università degli Studi di Brescia,
Via Branze 43, I-25123 Brescia, Italy*

Marco Antonio Pellegrini 

*Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Cattolica del Sacro Cuore,
Via Musei 41, I-25121 Brescia, Italy*

Received 6 September 2019, accepted 2 March 2020, published online 20 October 2020

Abstract

Relative Heffter arrays, denoted by $H_t(m, n; s, k)$, have been introduced as a generalization of the classical concept of Heffter array. A $H_t(m, n; s, k)$ is an $m \times n$ partially filled array with elements in \mathbb{Z}_v , where $v = 2nk + t$, whose rows contain s filled cells and whose columns contain k filled cells, such that the elements in every row and column sum to zero and, for every $x \in \mathbb{Z}_v$ not belonging to the subgroup of order t , either x or $-x$ appears in the array. In this paper we show how relative Heffter arrays can be used to construct biembeddings of cyclic cycle decompositions of the complete multipartite graph $K_{\frac{2nk+t}{t} \times t}$ into an orientable surface. In particular, we construct such biembeddings providing integer globally simple square relative Heffter arrays for $t = k = 3, 5, 7, 9$ and $n \equiv 3 \pmod{4}$ and for $k = 3$ with $t = n, 2n$, any odd n .

Keywords: Heffter array, biembedding, complete multipartite graph.

Math. Subj. Class.: 05B20, 05B30, 05C10

* Corresponding author.

E-mail addresses: simone.costa@unibs.it (Simone Costa), anita.pasotti@unibs.it (Anita Pasotti), marcoantonio.pellegrini@unicatt.it (Marco Antonio Pellegrini)

Relativne Heffterjeve matrike in bivložitve

Simone Costa, Anita Pasotti *

*DICATAM – Sez. Matematica, Università degli Studi di Brescia,
Via Branze 43, I-25123 Brescia, Italy*

Marco Antonio Pellegrini 

*Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Cattolica del Sacro Cuore,
Via Musei 41, I-25121 Brescia, Italy*

Prejeto 6. septembra 2019, sprejeto 2. marca 2020, objavljeno na spletu 20. oktobra 2020

Povzetek

Relativne Heffterjeve matrike, označene z $H_t(m, n; s, k)$, so bile vpeljane kot posplošitev klasičnega koncepta Heffterjeve matrike. $H_t(m, n; s, k)$ je delno urejena matrika velikosti $m \times n$ z elementi v \mathbb{Z}_v , kjer je $v = 2nk + t$, katere vrstice vsebujejo s zapolnjenih celic in katere stolpci vsebujejo k zapolnjenih celic, pri čemer je vsota elementov v vsaki vrstici in stolpcu enaka nič, in pri čemer se, za vsak $x \in \mathbb{Z}_v$, ki ne pripada podgrupi reda t , v matriki pojavi bodisi x bodisi $-x$. V tem članku pokažemo, kako s pomočjo relativnih Heffterjevih matrik konstruiramo bivložitve cikličnih cikelnih razgradenj polnega večdelnega grafa $K_{\frac{2nk+t}{t} \times t}$ na orientabilno ploskev. Posebej konstruiramo takšne bivložitve in predstavimo celoštevilske globalno enostavne kvadratne relativne Heffterjeve matrike za $t = k = 3, 5, 7, 9$ and $n \equiv 3 \pmod{4}$ in za $k = 3$, kjer je $t = n, 2n$, za vsak lih n .

Ključne besede: Heffterjeva matrika, bivložitve, polni večdelni graf.

Math. Subj. Class.: 05B20, 05B30, 05C10

*Kontaktni avtor.

E-poštni naslovi: simone.costa@unibs.it (Simone Costa), anita.pasotti@unibs.it (Anita Pasotti), marcoantonio.pellegrini@unicatt.it (Marco Antonio Pellegrini)