

On the incidence map of incidence structures*

Tim Penttila

*School of Mathematical Sciences, The University of Adelaide,
Adelaide, South Australia, 5005 Australia*

Alessandro Siciliano 

*Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia, Università degli Studi della
Basilicata, Viale dell'Ateneo Lucano 10, 85100 Potenza, Italy*

Received 30 April 2019, accepted 24 September 2020, published online 20 July 2021

Abstract

By using elementary linear algebra methods we exploit properties of the incidence map of certain incidence structures with finite block sizes. We give new and simple proofs of theorems of Kantor and Lehrer, and their infinitary version. Similar results are obtained also for diagrams geometries.

By mean of an extension of Block's Lemma on the number of orbits of an automorphism group of an incidence structure, we give informations on the number of orbits of: a permutation group (of possible infinite degree) on subsets of finite size; a collineation group of a projective and affine space (of possible infinite dimension) over a finite field on subspaces of finite dimension; a group of isometries of a classical polar space (of possible infinite rank) over a finite field on totally isotropic subspaces (or totally singular in case of an orthogonal space) of finite dimension.

Furthermore, when the structure is finite and the associated incidence matrix has full rank, we give an alternative proof of a result of Camina and Simons. We then deduce that certain families of incidence structures have no sharply transitive sets of automorphisms acting on blocks.

Keywords: Incidence structure, incidence map, diagram geometry.

Math. Subj. Class. (2020): 05B20, 05B05

*The authors would like to thank the anonymous referee for her/his comments as they greatly improved the first version of the paper.

E-mail addresses: tim.penttila@adelaide.edu.au (Tim Penttila), alessandro.siciliano@unibas.it (Alessandro Siciliano)

O incidenčnem zemljevidu incidenčnih struktur*

Tim Penttila

*School of Mathematical Sciences, The University of Adelaide,
Adelaide, South Australia, 5005 Australia*

Alessandro Siciliano 

*Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia, Università degli Studi della
Basilicata, Viale dell'Ateneo Lucano 10, 85100 Potenza, Italy*

Prejeto 30. aprila 2019, sprejeto 24. septembra 2020, objavljeno na spletu 20. julija 2021

Povzetek

Z uporabo metod elementarne linearne algebre raziščemo lastnosti incidenčnega zemljevida določenih incidenčnih struktur s končnimi velikostmi blokov. Predstavimo nove in enostavne dokaze izrekov Kantorja in Lehrerja, pa tudi njihovo neskončno različico. Podobne rezultate dobimo tudi za diagramske geometrije.

S pomočjo razširitve Blockove leme o številu orbit grupe avtomorfizmov incidenčne strukture dobimo informacije o številu orbit naslednjih struktur: permutacijske grupe (lahko tudi neskončne stopnje) na podmnožicah končne velikosti; kolineacijske grupe projek tivnega in afinega prostora (lahko tudi neskončne dimenzije) nad končnim poljem na podprostorih končne dimenzije; grupe izometrij klasičnega polarnega prostora (lahko tudi neskončnega ranga) nad končnim poljem na povsem izotropnih podprostorih (ali povsem singularnih v primeru ortogonalnega prostora) končnih dimenzij.

Nadalje, za primer, ko je struktura končna, pridružena incidenčna matrika pa ima poln rang, predstavimo alternativni dokaz rezultata Camine in Siemensa. Nato pokažemo, da določene družine incidenčnih struktur nimajo ostro tranzitivnih množic avtomorfizmov, ki bi delovali na blokih.

Ključne besede: Incidenčne strukture, incidenčni zemljevid, diagramska geometrija.

Math. Subj. Class. (2020): 05B20, 05B05

* Avtorja bi se rada zahvalila anonimnemu recenzentu za njegove/njene pripombe, ki so znatno izboljšale prvotno različico članka.

E-poštna naslova: tim.penttila@adelaide.edu.au (Tim Penttila), alessandro.siciliano@unibas.it (Alessandro Siciliano)