

Characterizing all graphs with 2-exceptional edges*

Drago Bokal[†]

Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Slovenia

Jesús Leños[‡]

Academic Unit of Mathematics, Autonomous University of Zacatecas, Mexico

Abstract: Dirac and Shuster in 1954 exhibited a simple proof of Kuratowski theorem by showing that any 1-crossing-critical edge of G belongs to a Kuratowski subdivision of G . In 1983, Širáň extended this result to any 2-crossing-critical edge e with endvertices b and c of a graph G with crossing number at least two, whenever no two blocks of $G - b - c$ contain all its vertices. Calling an edge f of G k -exceptional whenever f is k -crossing-critical and it does not belong to any Kuratowski subgraph of G , he showed that simple 3-connected graphs with k -exceptional edges exist for any $k \geq 6$, and they exist even for arbitrarily large difference of $\text{cr}(G) - \text{cr}(G - f)$. In 1991, Kochol constructed such examples for any $k \geq 4$, and commented that Širáň's result holds for any simple graph.

Examining the case when two blocks contain all the vertices of $G - b - c$, we show that graphs with k -exceptional edges exist for any $k \geq 2$, albeit not necessarily simple. We confirm that no such simple graphs with 2-exceptional edges exist by applying the techniques of the recent characterization of 2-crossing-critical graphs to explicitly describe the set of all graphs with 2-exceptional edges and noting they all contain parallel edges. In this context, the paper can be read as an accessible prelude to the characterization of 2-crossing-critical graphs.

Keywords: Kuratowski subgraphs, crossing number, exceptional edges.

Math. Subj. Class.: 05C10, 05C62

*Both authors would like to acknowledge the Crossing Number Workshop 2016 in Strobl, Austria, where parts of this research took place. We deeply acknowledge the significant effort of the referee 1 for improving the clarity of some technical details of the arguments in our paper.

[†]D. Bokal was partially supported by the Slovenian Research Agency projects L7-5459 and J1-8130.

[‡]Research started while on sabbatical leave at Maribor University. Partially supported by CONACyT Grant 179867 and by the grant Internationalisation of Slovene higher education within the framework of the Operational Programme for Human Resources Development 2007–2013.

E-mail addresses: drago.bokal@um.si (Drago Bokal), jleanos@matematicas.reduaz.mx (Jesús Leños)

Karakterizacija vseh grafov z 2-izjemnimi povezavami*

Drago Bokal[†]

Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Slovenia

Jesús Leños[‡]

Academic Unit of Mathematics, Autonomous University of Zacatecas, Mexico

Povzetek: Dirac in Shuster sta leta 1954 predstavila enostaven dokaz izreka Kuratowskega, ko sta pokazala, da poljubna 1-križno-kritična povezava grafa G pripada neki subdiviziji Kuratowskega grafa G . Leta 1983 je Širáň razširil ta rezultat na poljubno tako 2-križno-kritično povezavo e s krajiščema b in c v grafu G s križnim številom najmanj dve, da nobena dva bloka grafa $G - b - c$ ne vsebujeta vseh njegovih vozlišč. Povezavo f grafa G je imenoval k -izjemna, če je f k -križno-kritična in ne pripada nobenemu podgrafu Kuratowskega grafa G . Nato je pokazal, da enostavni 3-povezani grafi s k -izjemnimi povezavami obstajajo za poljuben $k \geq 6$ in da obstajajo celo za poljubno velike razlike $cr(G) - cr(G - f)$. Leta 1991 je Kochol konstruiral takšne primere za poljubne $k \geq 4$ in pripomnil, da Širáňov rezultat velja za poljuben enostaven graf.

V pričujočem članku raziščemo primer, ko dva bloka vsebujeta vsa vozlišča grafa $G - b - c$, in pokažemo, da grafi s k -izjemnimi povezavami obstajajo za poljuben $k \geq 2$, vendar niso nujno enostavni. Potrdimo, da ne obstajajo nobeni takšni enostavni grafi z 2-izjemnimi povezavami, in to z uporabo tehnik iz nedavne karakterizacije 2-križno-kritičnih grafov. Eksplicitno opišemo množico vseh grafov z 2-izjemnimi povezavami in opazimo, da vsi vsebujejo vzporedne povezave. V tem kontekstu je mogoče ta članek brati kot preludij h karakterizaciji 2-križno-kritičnih grafov.

Ključne besede: Podgrafi Kuratowskega, križno število, izjemni primeri.

Math. Subj. Class.: 05C10, 05C62

*Oba avtorja sta bila na delavnici Crossing Number Workshop 2016 v Stroblu, Avstrija, kjer sta opravila del te raziskave. Iskreno se zahvaljujema prvemu recenzentu, ki je s svojim trudom pomembno pripomogel k izboljšanju jasnosti nekaterih tehničnih podrobnosti argumentov v najinem članku.

[†]D. Bokal je bil delno podprt s strani Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije v okviru projektov L7-5459 in J1-8130.

[‡]Raziskava se je začela med študijskim dopustom na Univerzi v Mariboru. Delno je bila podprta s strani CONACyT Grant 179867 in s sredstvi Internationalisation of Slovene higher education v okviru Operational Programme for Human Resources Development 2007–2013.

E-poštna naslova: drago.bokal@um.si (Drago Bokal), jleanos@matematicas.reduaz.mx (Jesús Leños)